Dominointianalyysi

Teppo Niinimäki

Helsingin yliopisto

30. huhtikuuta 2010

Rakenne

Rakenne

Motivointi

Optimointiongelmiin kehitettyjen likimääräisten algoritmien (heuristiikat/approksimointialgoritmit) toimivuutta halutaan usein arvioida.

Tyypillinen tapa: approksimointianalyysi

- verrataan ratkaisun hyvyyttä optimiratkaisuun

$\Rightarrow$approksiomointisuhde

Vaintoehtoinen tapa: **dominointianalyysi**

- verrataan ratkaisun hyvyyttä kaikkiin ratkaisuihin

$\Rightarrow$dominointiluku / dominointisuhde

Määritelmät

Olkoon ongelma annettu. Olkoot $\mathcal{A}$ tarkasteltava algoritmi ja n ongelman tapauksen koko.

Määritelmä

Dominointiluku $\mathrm{domn}(A, n)$ on $\mathcal{A}$:n tuottamaan ratkaisuun verrattuna korkeintaan yhtä hyvien ratkaisujen lukumäärä pahimmassa n:n kokoisessa tapauksessa.

Määritelmä

Dominointisuhde $\mathrm{domr}(A, n)$ on dominointiluvun osuus kaikkien käypien ratkaisujen lukumäärästä.

Määritelmät (jatkoa)

Määritelmä

Ongelma on $\mathcal{DOM}$**-helppo**, jos sille on olemassa polynomisessa ajassa toimiva algoritmi, jonka dominointisuhde on vähintään $1/p(n)$ joillain polynomilla $p(n)$.
Muussa tapauksessa ongelman sanotaan olevan $\mathcal{DOM}$**-kova.**

Rakenne

Esimerkki: Monen suorittimen skedulointi

Ongelma: Annettu joukko töitä J, niiden suoritusajat $\sigma(j)$, $j \in J$ sekä suorittimien lukumäärä n. Tehtävänä jakaa työt suorittimille minimoiden pisin suoritusaika. Rajoitutaan kahden suorittimen tapaukseen $n = 2$. Ratkaisu on siis jokin J:n osiointi (A_1, A_2).

Ahne algoritmi $\mathcal{A}$:

1. Järjestä työt pisimmästä lyhimpään.
2. Käyt työt läpi tässä järjestyksessä ja anna suorittimelle, jolla sillä hetkellä vähiten kuormaa.

Esimerkki: Monen suorittimen skedulointi (jatkoa)

Väite: $\mathcal{A}$:n dominointisuhde on vähintään $1/2$.

Todistus: $\mathcal{A}$:n ratkaisussa suorittimien kuormilla on eroa selvästi korkeintaan pisimmän työn verran.
Tarkastellaan mielivaltaista ratkaisua vastaavaan ongelmaan, josta pisin työ on poistettu. Jos kyseinen pisin työ lisätään suorittimelle, jonka työmäärä on ratkaisussa, suurempi saadaan alkuperäiseen ongelmaan ratkaisu, jossa kuormien ero on vähintään pisimmän työn kokoinen.
Tällaisia ratkaisuja on puolet kaikkien ratkaisujen määrästä ja $\mathcal{A}$:n tuottama ratkaisu on vähintään yhtä hyvä kuin ne kaikki. $\square$

Rakenne

Muita tuloksia

Saavutettuja dominointisuhteita

- Muuntamalla yllä olevaa algoritmia saadaan monen suorittimen skeduloinnille algoritmi $\mathcal{A}$, jolla

$$\lim_{s \to \infty} \operatorname{domr}(\mathcal{A}, s) = 1,$$

  missä s on ongelman koko.
- Epäsymmetrinen kauppamatkustajan ongelma saadaan ratkaistua dominointisuhteella $\Omega(1/n)$, painotettu maksimileikkaus ja painotettu maksimi k-SAT puolestaan vakiosuhteella $\Omega(1)$.

Muita tuloksia (jatkoa)

Rajoja dominoituvuudelle

- Maksimiklikkiongelma ja pienin solmupeite ovat $\mathcal{DOM}$-kovia (ellei $P = NP$).
- Useiden ongelmien (esim. ATSP ja STSP) kaikille ahneille algoritmeille on dominointiluku 1.
- Jos ATSP-algoritmin aikavaativuus on $t(n) \geq en$, niin dominointiluku voi olla korkeintaan $(t(n)/n)^n$.