Johdatus tekoälyyn, syksy 2014, Teemu Roos Harjoitus 2: Esimerkkiratkaisuja

Tehtävä 1. Todennäköisyyslaskentaa

a) Koska tapahtumat ”1. ei ole pata” ja ”2. ei ole pata” ovat riippumattomia, voidaan laskea

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\text{"kumpikaan kortti ei ole pataa"}) = \mathrm{P}(\text{"1. ei ole pata"}) \times \mathrm{P}(\text{"2. ei ole pata"})\\ &= \frac{39}{52} \times \frac{39}{52} = \frac{9}{16} = 0.5625.\end{aligned}$$

b) Samaan tapaan kuin a-kohdassa:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\text{"molemmat kortit ovat pataa"}) = \mathrm{P}(\text{"1. on pata"}) \times \mathrm{P}(\text{"2. on pata"})\\ &= \frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{16} = 0.0625.\end{aligned}$$

c) Voidaan laskea kahdella tavalla. Ensimmäinen tapa:

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(\text{"tasan yksi korteista on pataa"})\\ &= \mathrm{P}(\text{"1. on pata"}) \times \mathrm{P}(\text{"2. ei ole pata"}) + \mathrm{P}(\text{"1. ei ole pata"}) \times \mathrm{P}(\text{"2. on pata"})\\ &= \frac{13}{52} \times \frac{39}{52} + \frac{13}{52} \times \frac{39}{52} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = 0.375,\end{aligned}$$

missä siis lasketaan yhteen kahden toisensa poissulkevan tapahtuman todennäköisyydet. Toinen vaihtoehto on käyttää kohtien a ja b tuloksia ja laskea

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}((\text{"tasan yksi korteista on pataa"})\\ &= 1 - \mathrm{P}((\text{"kumpikaan kortti ei ole pataa"}) - \mathrm{P}((\text{"molemmat kortit ovat pataa"})\\ &= 1 - \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = 0.375,\end{aligned}$$

missä puolestaan käytettiin hyödyksi sitä, että patojen lukumäärä kahdesta kortista on joko 0,1 tai 2, ja nämä tapaukset ovat toisensa poissulkevia, joten $\mathrm{P}(0)+\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2) = 1$.

d) Lasketaan P(”numeroiden summa suurempi kuin 4”) $= 1-P(A)$, missä $A =$”numeroiden summa korkeintaan 4”. Tapahtuma A tapahtuu, jos korttien numerot ovat (1,1),(1,2), (2,1), (2,2),(1,3) tai (3,1). Korttipareja (alkeistapahtumia) on siis $6 \times 4 \times 4 = 48$ (missä 4×4 tulee siitä, että korttien maat voivat olla mitä hyvänsä). Yhteensä alkeistapahtumia on kaikenkaikkiaan $13 \times 13 \times 4 \times 4 = 52 \times 52 = 2704$. Tulos on siten

$$\mathrm{P}(\text{"numeroiden summa suurempi kuin 4"}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{96}{2704} = \frac{163}{169} \approx 0.965.$$

e) Jos asiaa miettii hetkisen, voi ”nähdä suoraan”, että jos ensimmäinen kortti on numeroltaan 2, on toisen kortin numeron oltava suurempi kuin 2, jotta numeroiden summa olisi suurempi kuin 4. Numeroltaan suurempia kuin 2 on 13:sta kortista 11, joten todennäköisyys on $\frac{11}{13} \approx 0.846$.

Todennäköisyyslaskennassa on kuitenkin usein vaarana, että näkee suoraan, mutta väärin, joten on hyvä muistaa, että tuloksen voi **aina** tarkistaa laskemalla yhteen alkeistapahtumien todennäköisyyksiä. Merkitään $A =$ ”numeroiden summa suurempi kuin 4” ja $B =$ ”ensimmäisen kortin numero on 2”. Ehdollinen todennäköisyys saadaan laskemalla

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)},$$

missä siis $P(A,B)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että sekä A että B tapahtuvat. Tämä saadaan laskemalla kuinka monella tapaa korttien numeroiden summa voi olla suurempi kuin 4, kun ensimmäisen numero on 2. Jälkimmäisen kortin numeron on siis oltava isompi kuin 2, joten kuten edelle todettiin, vaihtoehtoja on 11. Kun otetaan huomioon eri maat, saadaan

$$\mathrm{P}(A,B) = \frac{11 \times 4 \times 4}{13 \times 13 \times 4 \times 4} = \frac{11}{13 \times 13} \approx 0.065$$

Todennäköisyys, että ensimmäisen kortin numero on 2, on $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{13} \approx 0.077$.

Tulokseksi saadaan siis

$$P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{\frac{11}{13 \times 13}}{\frac{1}{13}} = \frac{11}{13} \approx 0.846,$$

eli tällä kertaa oli nähty suoraan oikein.

f) Tehtävään on taas lyhyt, mutta hiukan kekseliäisyyttä vaativa ratkaisu ja toinen, pitempi, mutta suoraviivaisempi ratkaisu. Lyhyt ratkaisu hyödyntää ongelman symmetriaa: jos korttien numerot ovat erisuuret, on yhtä todennäköistä, että ensimmäinen on pienempi kuin että jälkimmäinen olisi pienempi. Todennäköisyys, että numerot ovat samat on

$$\mathrm{P}(\text{”samaa numeroa”}) = \frac{13 \times 1 \times 4 \times 4}{13 \times 13 \times 4 \times 4} = \frac{1}{13} \approx 0.077,$$

missä osoittaja saadaan huomaamalla, että oli ensimmäisen kortin numero mikä hyvänsä (13 vaihtoehtoa), on jälkimmäisen kortin numerolle vain yksi vaihtoehto. Siispä $\mathrm{P}(\text{”eri numeroa”}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} \approx 0.923$. Jakamalla tämä kahdella saadaan nyt

$$\mathrm{P}(\text{”ensimmäisen kortin numero pienempi kuin jälkimmäisen”}) = \frac{1}{2} \times \frac{12}{13} = \frac{6}{13} \approx 0.462.$$

Varmempi tapa on taas laskea suoraviivaiseti alkeistapahtumia. Jos jätetään huomiotta korttien maat, vaihtoehtoisia korttipareja, joissa ensimmäisen kortin numero on pienempi kuin jälkimmäisen ovat (1,2), (1,3), . . ., (1,13), (2,3), (2,4), . . ., (2,13), . . . , (12,13). Näitä on yhteensä $12 + 11 + \cdots + 1 = 78$. Näin saadaan vastaukseksi

$$\mathrm{P}(\text{”ensimmäisen kortin numero pienempi kuin jälkimmäisen”}) = \frac{78 \times 4 \times 4}{13 \times 13 \times 4 \times 4} = \frac{6}{13}$$

mikä on huojentavasti sama kuin edellä saatu tulos.

g) Kyseessä on Bayesin kaavan sovellus:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{magia} \mid \text{arpa}) &= \frac{\mathrm{P}(\text{magia})\,\mathrm{P}(\text{arpa} \mid \text{magia})}{\mathrm{P}(\text{arpa})} \\ &= \frac{\mathrm{P}(\text{magia})\,\mathrm{P}(\text{arpa} \mid \text{magia})}{\mathrm{P}(\text{magia})\,\mathrm{P}(\text{arpa} \mid \text{magia}) + P(\neg\text{magia})P(\text{arpa} \mid \neg\text{magia})},\end{aligned}$$

missä magia = ”Saku maaginen”, arpa =”oikea arpa”. Lukuarvot saadaan tehtävänannosta:

$$\mathrm{P}(\text{magia}) = \frac{1}{10\,000} \qquad \mathrm{P}(\text{arpa} \mid \text{magia}) = 1 \qquad \mathrm{P}(\text{arpa} \mid \neg\text{magia}) = \frac{1}{100}.$$

Nämä sijoittamalla saadaan tulokseksi

$$P(\text{magia} \mid \text{arpa}) = \frac{0.0001 \times 1}{0.0001 \times 1 + 0.9999 \times \frac{1}{100}} \approx 0.01.$$

Sakulla on siis todennäköisesti vain käynyt hyvä tuuri.

Tehtävä 2. Minimax ja alpha-beta.

a-b) ks. kuva 1.

c) Muista, että α-arvon voi tulkita MIN-solmun yläpuolelle olevan MAX-solmun saamaksi toistaiseksi parhaaksi ”tarjoukseksi”. Jos MIN-solmussa havaitaan, että solmun arvoksi on tulossa α-arvoa pienempi luku, voidaan lopettaa, koska yläpuolella olevasta MAX-solmussa ei koskaan pelata siirtoa, joka päätyisi nykyiseen MIN-solmuun. Myös β arvolla on vastaava tulkinta.

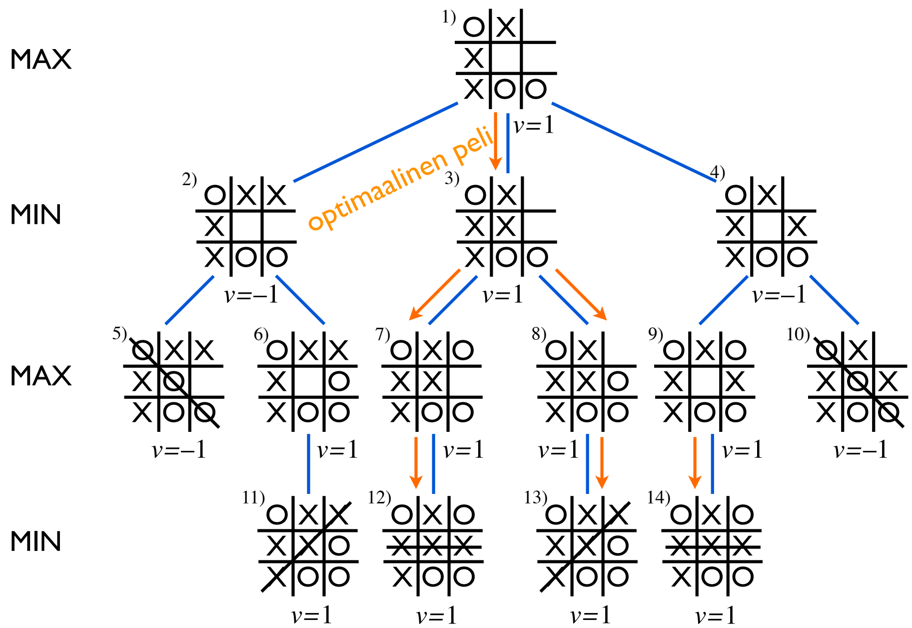
MIN-solmussa numero 2 (ks. kuva 1 seuraavalla sivulla) saadaan lapsesta paluuarvo $v = -1$. Tätä verrataan juurisolmusta saatuun α-arvoon -1 ja todetaan, että ne ovat yhtä suuret. Siten vasemmanpuoleisen haaran oikeaa alahaaraa eli solmuja 6 ja 11 (jotka johtaisivat X-pelaajan voittoon) ei käydä lainkaan läpi.

Solmu 2 palauttaa edelleen juurisolmuun paluuarvona $v = -1$, mikä ei vaikuta juurisolmun α- ja β-arvoihin, koska MAX-solmu päivittää vain α-arvoa, joka oli jo aluksi -1.

Solmu 3 saa paluuarvona lapsisolmusta 7 arvon $v = 1$. Tälläkään ei ole vaikutusta α- ja β-arvoihin, koska MIN-solmu päivittää vain β-arvoaan, joka oli jo valmiiksi 1. MIN-solmu myös vertaa lapsistaan tulevia paluuarvoja ja tarkistaa päteekö kenties $v \leq \alpha$. Nyt $v = 1$ ja $\alpha = -1$, joten ehto ei täyty ja karsintaa *ei* tapahdu.

Seuraavaksi karsintaa tapahtuu juurisolmussa, kun keskimmäisen haaran solmusta 3 palautuu paluuarvo $v = 1$. Tällöin juurisolmu, joka on MAX-solmu, vertaa paluuarvoa β-arvoonsa ja huomaa sen olevan yhtä suuri. Koko oikeanpuoleinen haara voidaan siten jättää käymättä läpi.

Jos keskimmäinen haara olisi ollut vasemmalla ja käyty läpi ensimmäisenä, olisi kaikki muut haarat karsittu pois. Tätä ilmiötä yritetään hyödyntää esim. shakkialgoritmeissa, joissa lupaavimmat siirrot pyritään laajentamaan ensin.



Kuva 1: Tehtävän 1 pelipuu. Minimax-algoritmin tuottamat arvot on merkitty kunkin solmun alle ($v = -1/0/1$). Optimaaliset siirrot johtavat kummassakin tapauksessa X-pelaajan voittoon.

Tehtävä 3. Alpha-beta.

Kurssin verkkosivulla.

Tehtävä 4. Reittiopas: A*-haku.

Kurssin verkkosivulla.